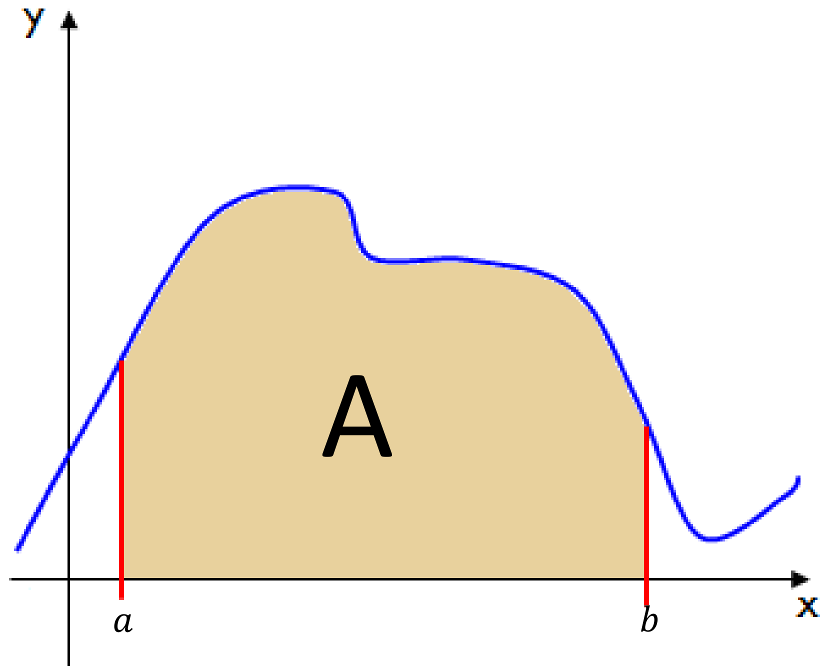
Integrale

Flächen
Änderungsraten / Bestände
Mittelwerte
Rotationskörper

E-Mail: klaus_messner@web.de, Internet: www.elearning-freiburg.de

Einführung des Integrals

Das Integral wird aus einer geometrischen Fragestellung hergeleitet: Wie bestimmt man die Flächen zwischen einer Kurve und der x-Achse innerhalb des Intervalls $[a; b]$?



Der Hauptsatz

In der Schule lernt man den

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Hierbei nennt man $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

Es gilt der fundamentale Zusammenhang: $F'(x) = f(x)$

Dies bedeutet Integrieren ist die Umkehrung des Differenzierens, daher sagt man auch „aufleiten".

Flächenberechnung mit dem Integral

Experiment:

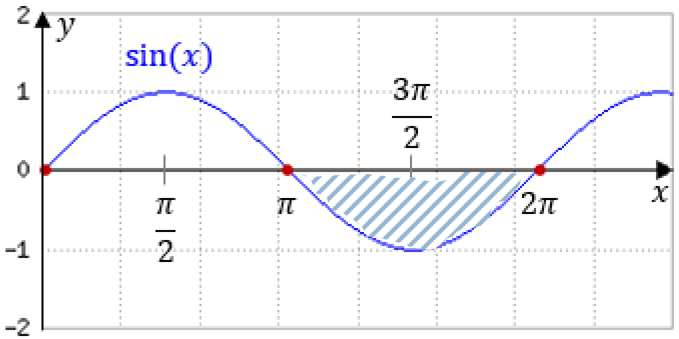
Gesucht ist die Fläche zwischen $f(x) = \sin(x)$ und der x-Achse im Intervall $[\pi; 2\pi]$.

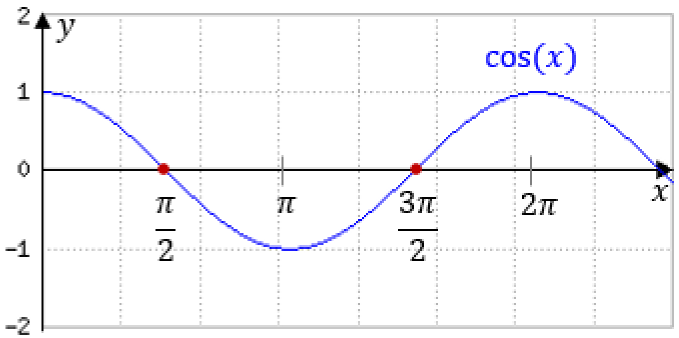
$$A = \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -\cos(2\pi) - \left(-\cos(\pi)\right)$$

$$= -1 - 1 = -2$$

Negative Flächen ???



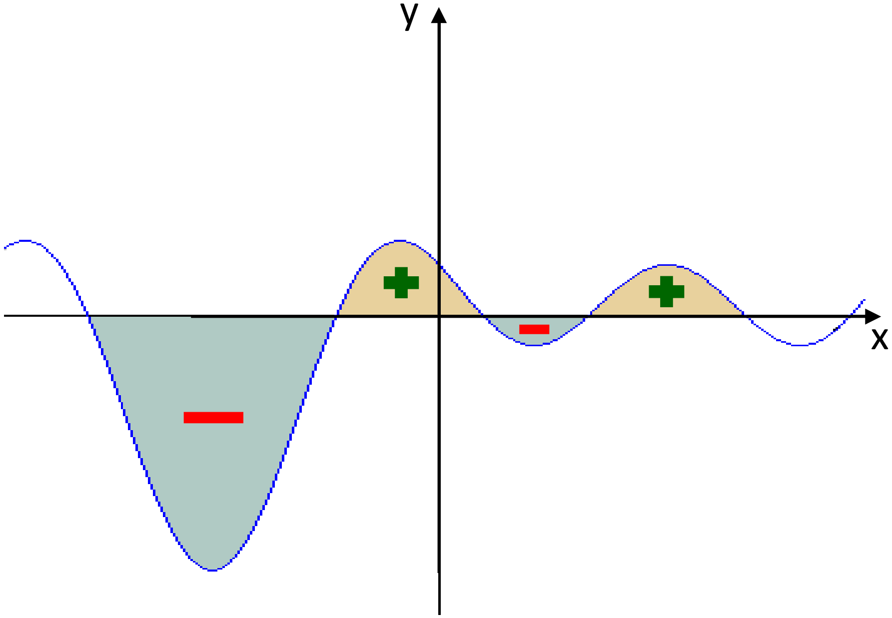


Flächenberechnung mit dem Integral

Erkenntnis: Der Wert des Integrals stellt nicht immer die Fläche unter einer Kurve dar! Verläuft die Kurve teilweise unterhalb der x-Achse, so kommt es zu Auslöschungen oder sogar zu einem negativen Vorzeichen!

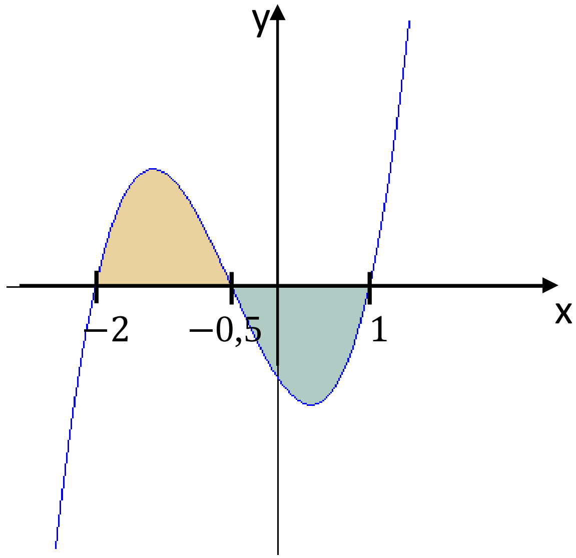
Maßnahme:

Integriere von Nullstelle zu Nullstelle und nimm Beträge!



Rechenbeispiel

Gesucht ist die Fläche zwischen $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2 - 1{,}5x - 1$ und der x-Achse im Intervall $[-2; 1]$.



Lösung:

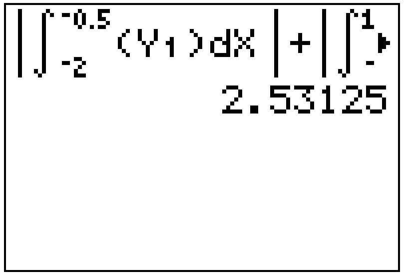
$$A = \left|\int_{-2}^{-0{,}5} f(x)dx\right| + \left|\int_{-0{,}5}^{1} f(x)dx\right| = 2{,}53125$$

Die gesuchte Fläche beträgt

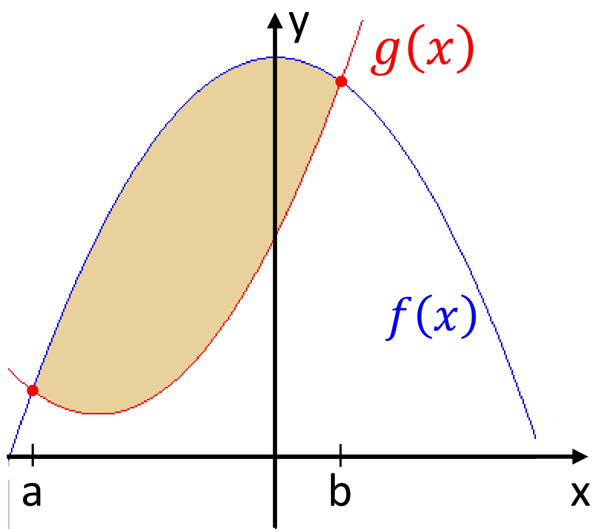
etwa 2,5LE^2.

Mit GTR: $f(x)$ bei Y_1 eingeben,

abs(fnInt(Y_1,X,-2,-0.5)) + abs(fnInt(Y_1,X,-0.5,1))



Fläche zwischen zwei Kurven



Wie berechnet man die Fläche zwischen zwei Kurven in einem gegebenen Intervall [a;b]?

Idee: Fläche obere Kurve minus Fläche untere Kurve.

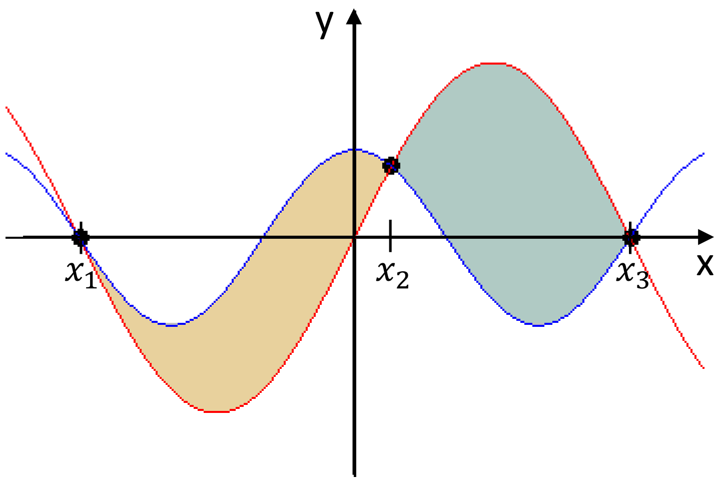
Ansatz: $A = \int_a^b f\,(x)dx - \int_a^b g\,(x)dx = \int_a^b \big(f\,(x) - g(x)\big)\,dx$

Vermeide negatives Vorzeichen durch Betragsbildung:

$$A = \left| \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx \right|$$

Fläche zwischen zwei Kurven

Beachte, dass es bei mehreren Flächenstücken wieder zu Auslöschungen kommen kann!



Maßnahme:

Bestimme die Schnittpunkte der Kurven, integriere von Schnittpunkt zu Schnittpunkt und nimm die Beträge.

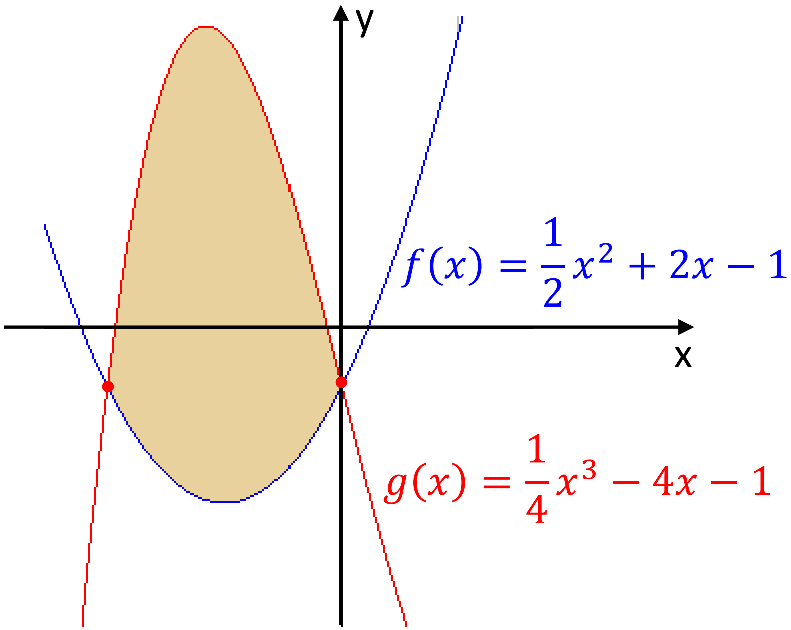
Für obige Abbildung gilt dann:

$$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} \big(f(x) - g(x)\big)\, dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} \big(f(x) - g(x)\big)\, dx \right|$$

Rechenbeispiel 1

Bestimme die Fläche zwischen den beiden Kurven von $f(x)$ und $g(x)$ zwischen den Schnittpunkten von Hand.

Lösung:



Zuerst die Schnittpunkte.

$g(x) = f(x)$ liefert:

$$\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x = 0 \mid \cdot 4$$

$\Rightarrow x^3 - 2x^2 - 24x = 0$

$\Rightarrow x(x^2 - 2x - 24) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -4; x_3 = 6$

mit der p-q-Formel.

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$
$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - 4x - 1$

Rechenbeispiel 1

Nun berechnen wir die Fläche:

Es gilt $\mathrm{A} = \left|\int_{-4}^{0}(f(x) - g(x))\,dx\right|$

Mit $f(x) - g(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x$ folgt:

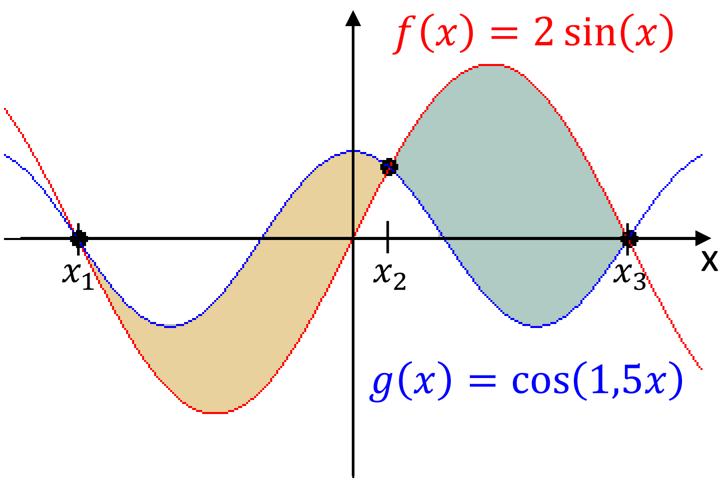
$$\underline{\mathrm{A}} = \left|\int_{-4}^{0}\left(-\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x\right)dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + 3x^2\right]_{-4}^{0}\right|$$

$$= \left|0 - \left(-16 - \frac{64}{6} + 48\right)\right| = \underline{21\tfrac{1}{3}\ \mathrm{LE}^2}$$

Rechenbeispiel 2

Bestimme die Fläche zwischen den beiden Kurven von $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[x_1; x_3]$ mit dem GTR.

Lösung:



Eingaben im Y-Editor:

- $Y_1 = 2\sin(x)$ und $Y_2 = \cos(1.5x)$
- Kurven zeichnen lassen mit GRAPH
- Schnittpunkte mit 2ND CALC intersect
  $\Rightarrow x_1 = -\pi; x_2 = 0{,}426; x_3 = \pi$

Rechenbeispiel 2

Die Fläche ist gegeben durch:

$$A = \left| \int_{-\pi}^{0{,}426} (f(x) - g(x))\,dx \right| + \left| \int_{0{,}426}^{\pi} (f(x) - g(x))\,dx \right|$$

Dies gibt man im GTR so ein:

- abs(fnInt(Y_1-Y_2,X,-π,0.426)) + abs(fnInt(Y_1-Y_2,X,0.426,π))
- fnInt erhält man über MATH,
- abs erhält man über MATH im Menü NUM

Der GTR liefert dann die Fläche mit $\underline{A = 8{,}435 \text{ LE}^2}$.